„Kwartalnik Opolski” 2013, 4

Robert SOCHACKI, Arkadiusz BRYLL

Cechy podzielności przez różne liczby naturalne

Celem niniejszej publikacji jest przede wszystkim podanie elementarnych uzasadnień niektórych cech podzielności pewnych liczb naturalnych. Nowa podstawa programowa nauczania matematyki w szkołach ponadgimnazjalnych tego nie przewiduje. W szkole wspomina się jedynie o niektórych cechach podzielności oraz „testuje” się te cechy na wybranych liczbach. Sądzimy, że nasze podejście ma duże walory dydaktyczne – odsłania ono metodę opracowywania takich cech i może być z powodzeniem prezentowane uczniom. Ponadto podane są też liczne adekwatnie dobrane przykłady. Nasza propozycja może być wykorzystana w praktyce zawodowej czynnych nauczycieli matematyki lub też osób, które pragną zostać nauczycielami. Proponowane przez nas uzasadnienia niewątpliwie przyczynią się do uatrakcyjnienia nauczania poprawnego wnioskowania, być może też zostaną wykorzystane przez osoby na co dzień niezwiązane z matematyką, np. do weryfikacji swoich wydatków.

W dalszych rozważaniach zakładamy, że liczby L oraz m są naturalne (rozszerzenie rozważań na liczby całkowite pominiemy). Podzielność liczby L przez liczbę m można ustalić trzema sposobami:

1. Wykonanie bezpośredniego dzielenia liczby L przez m ($m \neq 0$). Jeżeli liczba L dzieli się przez m z resztą zero, to znaczy, że liczba L jest podzielna przez m (co zapisujemy $m|L$).

2. Rozkład liczby L na czynniki pierwsze. Jeżeli w rozkładzie liczby L na czynniki pierwsze występuje czynnik m lub występują czynniki, które w iloczynie dają liczbę m, to $m|L$.

3. Wykorzystanie cech podzielności liczb.

Należy zauważyć, że niekiedy bezpośrednie dzielenie liczby L przez daną liczbę $m \neq 0$ pozwala rozstrzygnąć o podzielności szybciej niż dwa pozostałe sposoby. Często jednak korzystamy ze sposobów 2 i 3. Na przykład w celu zbadania podzielności liczby 420 przez 12 możemy rozłożyć liczbę 420 na czynniki: $420 = 2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7$. Ponieważ $12 = 2 \cdot 2 \cdot 3$, zatem $12|420$.

Omówimy dokładniej ostatni ze sposobów, podając cechy podzielności liczb przez każdą liczbę naturalną z przedziału $\langle 2, 15\rangle$ oraz przez niektóre inne liczby naturalne. W szkole wykorzystuje się tylko cechy podzielności liczb przez niektóre liczby z przedziału $\langle 2, 15\rangle$, gdy tymczasem uzasadnienie i wykorzystanie cech podzielności przez inne liczby z tego przedziału nie jest trudne.

Przez cechę podzielności liczby L przez liczbę naturalną $m \neq 0$ rozumiemy warunek konieczny i dostateczny podzielności L przez m. Na przykład cecha podzielności przez liczbę 9 ma postać:

- *warunek konieczny*: Jeżeli liczba L jest podzielna przez 9, to suma cyfr tej liczby jest podzielna przez 9;
- *warunek dostateczny*: Jeżeli suma cyfr liczby L jest podzielna przez 9, to liczba ta jest podzielna przez 9.

Podobnie cechy *bbb*, *bkb*, *kbk* przystawania trójkątów mają postać warunku koniecznego i dostatecznego.

Przy ustalaniu podzielności liczb korzystamy najczęściej z warunku dostatecznego danej cechy. Omówimy najpierw zagadnienia teoretyczne dotyczące cech podzielności liczb, a następnie zilustrujemy sposób wykorzystania tych cech w praktyce szkolnej.

Przy ustalaniu cech podzielności liczb korzystamy z następujących własności:

I. Jeżeli f jest wielomianem o współczynnikach całkowitych postaci: $f(x) = c_n x^n + c_{n-1}x^{n-1} + \dots + c_2x^2 + c_1x + c_0$ oraz $m|a - b$, to $m|f(a) - f(b)$.

II. Jeżeli $m|p - q$, to ($m|p$ wtedy i tylko wtedy, gdy $m|q$).

III. Jeżeli $NWD(a, b) = 1$ i $m|a$ i $m|b$, to $m|a \cdot b$.

Liczbę naturalną zapisaną w systemie pozycyjnym dziesiętnym w postaci $L = (c_n c_{n-1} \dots c_2 c_1 c_0)_{10}$ można przedstawić następująco:

$$L = c_n \cdot 10^n + c_{n-1} \cdot 10^{n-1} + \dots + c_2 \cdot 10^2 + c_1 \cdot 10 + c_0.$$

Mamy więc: $L = f(10)$.

A. Podzielność liczby L przez 2, 5 i 10.

Na podstawie oczywistych zależności: $2|10 - 0$, $5|10 - 0$, $10|10 - 0$ oraz wobec własności (I) otrzymujemy: $2|f(10) - f(0)$, $5|f(10) - f(0)$, $10|f(10) - f(0)$.

Ponieważ $f(10) = L$, $f(0) = c_0$, zatem: $2|L - c_0$, $5|L - c_0$, $10|L - c_0$. Stąd na podstawie własności (II) mamy:

– jeżeli c_0 jest liczbą parzystą ($c_0 \in \{0, 2, 4, 6, 8\}$), to $2|L$;

– jeżeli $c_0 = 0$ lub $c_0 = 5$, to $5|L$;
– jeżeli $c_0 = 0$, to $10|L$.

Podaliśmy tutaj warunki dostateczne podzielności liczby L przez 2, 5 i 10. Warunki konieczne otrzymamy, podając implikacje odwrotne.

B. Podzielność liczby *L* przez 4 i przez 8.

Korzystając z prawdziwych zależności: $4|10 - 2$, $4|10 - (-2)$, $8|10 - 2$ oraz z własności (I), mamy: $4|f(10) - f(2)$, $4|f(10) - f(-2)$, $8|f(10) - f(2)$.

Ponieważ $f(10) = L$ oraz

$$f(2) = c_n \cdot 2^n + \dots + c_2 \cdot 2^2 + c_1 \cdot 2 + c_0 = 2^2(c_n \cdot 2^{n-2} + \dots + c_2) + c_1 \cdot 2 + c_0,$$

$$f(-2) = c_n \cdot (-2)^n + \dots + c_2 \cdot (-2)^2 + c_1 \cdot (-2) + c_0 = (-2)^2(c_n \cdot (-2)^{n-2} \dots + c_2) - 2c_1 + c_0,$$

$$f(2) = 2^3(c_n \cdot 2^{n-3} + \dots + c_3) + c_2 \cdot 2^2 + c_1 \cdot 2 + c_0,$$

zatem

$$4|L \Leftrightarrow 4|f(2) \Leftrightarrow 4|2c_1 + c_0,$$
$$4|L \Leftrightarrow 4|f(-2) \Leftrightarrow 4|-2c_1 + c_0,$$
$$8|L \Leftrightarrow 8|f(2) \Leftrightarrow 8|4c_2 + 2c_1 + c_0.$$

Liczba L jest więc podzielna przez 4 wtedy i tylko wtedy, gdy $4|2c_1 + c_0$ lub $4|-2c_1 + c_0$.

Liczba L jest więc podzielna przez 8 wtedy i tylko wtedy, gdy $8|4c_2 + 2c_1 + c_0$.

C. Podzielność liczby *L* przez 7, 11, 13, 125 i 1000.

Liczbę $L = c_n \cdot 10^n + c_{n-1} \cdot 10^{n-1} + \dots \langle\ c_2 \cdot 10^2 + c_1 \cdot 10 + c_0$ można przedstawić następująco:

$$L = \begin{cases} (00c_n)_{10} \cdot 1000^{\frac{n}{3}} + (c_{n-1}c_{n-2}c_{n-3})_{10} \cdot 1000^{\frac{n-3}{3}} + \dots + (c_5c_4c_3)_{10} \cdot 1000 + \\ +(c_2c_1c_0)_{10}, \quad \text{gdy } 3|n, \\ (0c_nc_{n-1})_{10} \cdot 1000^{\frac{n-1}{3}} + (c_{n-2}c_{n-3}c_{n-4})_{10} \cdot 1000^{\frac{n-4}{3}} + \dots + (c_5c_4c_3)_{10} \cdot 1000 + \\ +(c_2c_1c_0)_{10}, \quad \text{gdy } 3|n-1, \\ (c_nc_{n-1}c_{n-2})_{10} \cdot 1000^{\frac{n-2}{3}} + (c_{n-3}c_{n-4}c_{n-5})_{10} \cdot 100^{\frac{n-5}{3}} + \dots + (c_5c_4c_3)_{10} \cdot 1000 + \\ +(c_2c_1c_0)_{10}, \quad \text{gdy } 3|n-2. \end{cases}$$

Rozważmy funkcję g postaci:

$$L = \begin{cases} (00c_n)_{10} \cdot x^{\frac{n}{3}} + (c_{n-1}c_{n-2}c_{n-3})_{10} \cdot x^{\frac{n-3}{3}} + \cdots + (c_5c_4c_3)_{10} \cdot x + \\ +(c_2c_1c_0)_{10}, \quad \text{gdy } 3|n, \\ (0c_nc_{n-1})_{10} \cdot x^{\frac{n-1}{3}} + (c_{n-2}c_{n-3}c_{n-4})_{10} \cdot x^{\frac{n-4}{3}} + \cdots + (c_5c_4c_3)_{10} \cdot x + \\ +(c_2c_1c_0)_{10}, \quad \text{gdy } 3|n-1, \\ (c_nc_{n-1}c_{n-2})_{10} \cdot x^{\frac{n-2}{3}} + (c_{n-3}c_{n-4}c_{n-5})_{10} \cdot x^{\frac{n-5}{3}} + \cdots + (c_5c_4c_3)_{10} \cdot x + \\ +(c_2c_1c_0)_{10}, \quad \text{gdy } 3|n-2. \end{cases}$$

Korzystając z prawdziwych relacji $7|1000-(-1)$, $11|1000-(-1)$, $13|1000-(-1)$ oraz z własności (I), otrzymamy: $7|g(1000)-g(-1)$, $11|g(1000)-g(-1)$, $13|g(1000)-g(-1)$. Dla $x = -1$ funkcja g przyjmuje wartość:

$$g(-1) = \cdots - (c_{11}c_{10}c_9)_{10} + (c_8c_7c_6)_{10} - (c_5c_4c_3)_{10} + (c_2c_1c_0)_{10} =$$
$$= -(100c_{11} + 10c_{10} + c_9) + (100c_8 + 10c_7 + c_6) - (100c_5 + 10c_4 + c_3) +$$
$$+ (100c_2 + 10c_1 + c_0).$$

Niech $a_1 = 100c_2 + 10c_1 + c_0$, $a_2 = 100c_5 + 10c_4 + c_3$, $a_3 = 100c_8 + 10c_7 + c_6$, $a_4 = 100c_{11} + 10c_{10} + c_9$. Mamy więc: $g(-1) = \cdots - a_4 + a_3 - a_2 + a_1$. Ponieważ $g(1000) = L$, zatem: $7|L-g(-1)$, $11|L-g(-1)$, $13|L-g(-1)$. Na podstawie własności (II) otrzymujemy następujące warunki dostateczne podzielności liczby L przez 7 lub 11 lub 13: jeżeli suma algebraiczna $g(-1) = \cdots - a_4 + a_3 - a_2 + a_1$ jest podzielna przez 7 lub 11 lub 13, to liczba L jest podzielna odpowiednio przez 7, 11, 13.

Warunki dostateczne podzielności liczby L przez 125 i 1000 można ustalić na podstawie relacji: $125|1000 - 0$, $1000|1000 - 0$. Stąd wobec (I) mamy: $125|g(1000) - g(0)$, $1000|g(1000) - g(0)$. Ponieważ $g(1000) = L$ i $g(0) = (c_2c_1c_0)_{10}$, zatem: $125|L - (c_2c_1c_0)_{10}$, $1000|L - (c_2c_1c_0)_{10}$.

Mamy więc:

– jeżeli $125|100c_2 + 10c_1 + c_0$, to $125|L$;

– jeżeli $1000|100c_2 + 10c_1 + c_0$, to $1000|L$.

Liczba L jest więc podzielna przez 1000, gdy $c_2 = c_1 = c_0 = 0$.

D. Podzielność liczby *L* przez 6, 12, 14, 15, 18 i 20.

Na podstawie własności (III) można sformułować następujące warunki dostateczne podzielności:

a) Jeżeli $2|L$ i $3|L$, to $6|L$, ponieważ $NWD(2, 3) = 1$;

b) Jeżeli $3|L$ i $4|L$, to $12|L$, ponieważ $NWD(3, 4) = 1$;

c) Jeżeli $2|L$ i $7|L$, to $14|L$, ponieważ $NWD(2, 7) = 1$;

d) Jeżeli $3|L$ i $5|L$, to $15|L$, ponieważ $NWD(3, 5) = 1$;

f) Jeżeli $2|L$ i $9|L$, to $18|L$, ponieważ $NWD(2, 9) = 1$;

g) Jeżeli $4|L$ i $5|L$, to $20|L$, ponieważ $NWD(4, 5) = 1$.

Liczba parzysta jest więc podzielna przez 6 lub 14, lub 18, gdy jest odpowiednio podzielna przez 3, 7, 9. Liczba podzielna przez 3 jest więc podzielna przez 12 lub 15, gdy jest odpowiednio podzielna przez 4, 5. Liczba podzielna przez 5 jest podzielna przez 20, gdy jest podzielna przez 4.

E. Inne cechy podzielności.

Liczbę $L = c_n \cdot 10^n + c_{n-1} \cdot 10^{n-1} + \cdots + c_2 \cdot 10^2 + c_1 \cdot 10 + c_0$ można przedstawić w postaci:

$$L = \begin{cases} (0c_n)_{10} \cdot 100^{\frac{n}{2}} + (c_{n-1}c_{n-2})_{10} \cdot 100^{\frac{n-2}{2}} + \cdots + (c_3c_2)_{10} \cdot 100 + (c_1c_0)_{10}, \\ \qquad \text{gdy} \quad 2|n, \\ (c_nc_{n-1})_{10} \cdot 100^{\frac{n-1}{2}} + (c_{n-2}c_{n-3})_{10} \cdot 100^{\frac{n-3}{2}} + \cdots + (c_3c_2)_{10} \cdot 100 + (c_1c_0)_{10}, \\ \qquad \text{gdy} \quad 2\nmid n \end{cases}$$

Weźmy pod uwagę funkcję h postaci:

$$h(x) = \begin{cases} (0c_n)_{10} \cdot x^{\frac{n}{2}} + (c_{n-1}c_{n-2})_{10} \cdot x^{\frac{n-2}{2}} + \cdots + (c_3c_2)_{10} \cdot x + (c_1c_0)_{10}, \\ \qquad \text{gdy} \quad 2|n, \\ (c_nc_{n-1})_{10} \cdot x^{\frac{n-1}{2}} + (c_{n-2}c_{n-3})_{10} \cdot x^{\frac{n-3}{2}} + \cdots + (c_3c_2)_{10} \cdot x + (c_1c_0)_{10}, \\ \qquad \text{gdy} \quad 2\nmid n \end{cases}$$

Korzystając z prawdziwych relacji: $4|100 - 0$, $25|100 - 0$, $100|100 - 0$ oraz z własności (I), otrzymamy: $4|h(100) - h(0)$, $25|h(100) - h(0)$, $100|h(100) - h(0)$. Ponieważ $h(100) = L$ i $h(0) = (c_1c_0)_{10}$, zatem: $4|L - (c_1c_0)_{10}$, $25|L - (c_1c_0)_{10}$, $100|L - (c_1c_0)_{10}$, czyli: $4|L - (10c_1 + c_0)$, $25|L - (10c_1 + c_0)$, $100|L - (10c_1 + c_0)$.

Warunki dostateczne podzielności liczby L przez 4 lub 25, lub 100 są następujące:

– jeżeli $4|(c_1c_0)_{10}$, to $4|L$;

– jeżeli $25|(c_1c_0)_{10}$, to $25|L$;

– jeżeli $100|(c_1c_0)_{10}$ (czyli $c_1 = c_0 = 0$), to $100|L$.

Aby więc zbadać podzielność liczby L przez 4 lub 25, lub 100, wystarczy zbadać podzielność liczby $(c_1c_0)_{10}$ (utworzonej z dwóch ostatnich cyfr liczby L) odpowiednio przez 4, 25, 100.

F. Sposób wprowadzania cech podzielności liczb w szkole.

W procesie dydaktycznym cechy podzielności liczb ustalamy nie na podstawie teoretycznych rozważań, lecz na drodze empirycznej poprzez rozpatrywanie konkretnych przykładów. Uzasadnienie własności (II) i (III) można przeprowadzić dopiero w klasach licealnych. Przed przystąpieniem do omawiania cech podzielności liczb wyjaśniamy uczniom, że każdą liczbę zapisaną w systemie pozycyjnym dziesiętnym można przedstawić w postaci rozwiniętej. Na przykład:

$273 = 2 \cdot 100 + 7 \cdot 10 + 3,$
$4652 = 4 \cdot 1000 + 6 \cdot 100 + 5 \cdot 10 + 2,$
$(c_2c_1c_0)_{10} = c_2 \cdot 100 + c_1 \cdot 10 + c_0,$
gdzie c_2, c_1, c_0 są cyframi.

Podzielność liczby $(c_3c_2c_1c_0)_{10}$ przez 2, 5, 10 wyjaśniamy następująco: liczbę L przedstawiamy w postaci rozwiniętej:

$$L = c_3 \cdot 1000 + c_2 \cdot 100 + c_1 \cdot 10 + c_0 = \underbrace{10(c_3 \cdot 100 + c_2 \cdot 10 + c_1)}_{L_1} + c_0.$$

Ponieważ liczba L_1 jest podzielna przez każdą z liczb 2, 5, 10, zatem liczba L jest podzielna przez 2 lub 5, lub 10 wtedy i tylko wtedy, gdy cyfra c_0 jest podzielna odpowiednio przez 2, 5, 10. Liczba L jest podzielna przez 2, gdy c_0 jest cyfrą parzystą; liczba L jest podzielna przez 5, gdy $c_0 = 0$ lub $c_0 = 5$; liczba L jest podzielna przez 10, gdy $c_0 = 0$.

W celu ustalenia cechy podzielności przez 3 lub 9 liczbę $L = (c_2c_1c_0)_{10}$ przedstawiamy następująco:

$$L = 1000c_3 + 100c_2 + 10c_1 + c_0 = (999 + 1)c_3 + (99 + 1)c_2 + (9 + 1)c_1 + c_0.$$

Stąd:

$$\begin{aligned} L &= 999c_3 + 99c_2 + 9c_1 + (c_3 + c_2 + c_1 + c_0) = \\ &= \underbrace{9(111c_3 + 11c_2 + c_1)}_{L_1} + (c_3 + c_2 + c_1 + c_0). \end{aligned} \tag{1}$$

Liczba L jest podzielna przez 3 i 9. Zatem liczba L jest podzielna przez 3 lub 9 wtedy i tylko wtedy, gdy suma cyfr tej liczby jest podzielna odpowiednio przez 3 i 9. Na podstawie przedstawienia liczby L w postaci (1) można zauważyć, że jeżeli jest ona podzielna przez 9, to jest także podzielna przez 3. Nie jest to jednak prawdziwa implikacja odwrotna. Na przykład $3|6$, ale $9 \nmid 6$.

Cechy podzielności przez 4, 25, 100 można ustalić następująco. Liczbę $L = (c_4c_3c_2c_1c_0)_{10} = 10000c_4 + 1000c_3 + 100c_2 + 10c_1 + c_0$ przedstawiamy w postaci:

$$L = \underbrace{100(100c_4 + 10c_3 + c_2)}_{L_1} + 10c_1 + c_0.$$

Liczba L_1 jest podzielna przez każdą z liczb 4, 25 i 100, zatem liczba L jest podzielna przez 4 lub 25 lub 100 wtedy i tylko wtedy, gdy liczba $(c_1c_0)_{10} = 10c_1 + c_0$ jest podzielna odpowiednio przez 4, 25, 100. W przypadku podzielności liczby L przez 100 mamy $c_1 = c_0 = 0$.

W celu wyjaśnienia cech podzielności przez 7, 11 i 13 daną liczbę $L = (c_6c_5c_4c_3c_2c_1c_0)_{10}$ przedstawiamy w postaci trójek:

$$L = (00c_6)_{10} - (c_5c_4c_3)_{10} + (c_2c_1c_0)_{10}$$

i badamy podzielność przez 7, 11 i 13 otrzymanej sumy algebraicznej. Liczba L jest podzielna przez 7 lub 11 lub 13 wtedy i tylko wtedy, gdy utworzona z tej liczby suma algebraiczna liczb trzycyfrowych jest podzielna odpowiednio przez 7, 11 i 13.

Oto przykłady:

- Liczba 61215 jest podzielna przez 7 i 11, gdyż –61 + 215 = 154, a jest to liczba podzielna przez 7 i przez 11;
- Liczba 5040 jest podzielna przez 7, gdyż –5 + 040 = 35, a $7|35$;
- Liczba 212355 jest podzielna przez 11 i 13, gdyż –212 + 355 = 143, a liczba ta dzieli się przez 11 i 13.

Cechę podzielności liczby przez 4 można wyjaśnić w taki sposób. Liczbę $L = (c_3c_2c_1c_0)_{10} = 1000c_3 + 100c_2 + 10c_1 + c_0$ przedstawiamy następująco:

$$L = 4 \cdot 250c_3 + 4 \cdot 25c_2 + (4 \cdot 2 + 2)c_1 + c_0 = \underbrace{4(250c_3 + 25c_2 + 2c_1)}_{L_1} + 2c_1 + c_0.$$

Liczba L_1 jest podzielna przez 4, a zatem liczba L dzieli się przez 4 wtedy i tylko wtedy, gdy $4|2c_1 + c_0$.

W celu ustalenia cechy podzielności przez 8 daną liczbę $L = (c_4c_3c_2c_1c_0)_{10}$ przedstawiamy następująco:

$$\begin{aligned} L &= 10000c_4 + 1000c_3 + 100c_2 + 10c_1 + c_0 = \\ &= 8 \cdot 1250c_4 + 8 \cdot 125c_3 + (8 \cdot 12 + 4)c_2 + (8 + 2)c_1 + c_0 = \\ &= \underbrace{8(1250c_4 + 125c_3 + 12c_2 + c_1)}_{L_1} + 4c_2 + 2c_1 + c_0. \end{aligned}$$

Liczba L_1 jest podzielna przez 8. Liczba L dzieli się przez 8 wtedy i tylko wtedy, gdy $8|4c_2 + 2c_1 + c_0$.

Cechę podzielności liczby przez 125 lub 1000 można otrzymać następująco.

Niech

$$L=(c_5c_4c_3c_2c_1c_0)_{10}=100000c_5+10000c_4+1000c_3+100c_2+10c_1+c_0=$$
$$=\underbrace{1000(100c_5+10c_4+c_3)}_{L_1}+100c_2+10c_1+c_0.$$

Liczba L_1 jest podzielna przez 125 i 1000. Stąd liczba L dzieli się przez 125 i 1000 wtedy i tylko wtedy, gdy liczba $(c_2c_1c_0)_{10}$ = $100c_2 + 10c_1 + c_0$ jest odpowiednio podzielna przez 125 i 1000. Liczba L jest podzielna przez 1000, gdy $c_2 = c_1 = c_0 = 0$.

Cechę podzielności przez 4, 25, 100 można także otrzymać następująco. Liczbę $L=(c_4c_3c_2c_1c_0)_{10}$ przedstawiamy następująco:

$$L=10000c_4+1000c_3+100c_2+10c_1+c_0=$$
$$=8\cdot 1250c_4+8\cdot 125c_3+(8\cdot 12+4)c_2+(8+2)c_1+c_0=$$
$$=\underbrace{100(100c_4+10c_3+c_2)}_{L_1}+10c_1+c_0.$$

Ponieważ liczba L_1 jest podzielna przez 4, 25 i 100, zatem L dzieli się przez 4, 25 i 100 wtedy i tylko wtedy, gdy liczba $(c_1c_0)_{10}$ = $10c_1 + c_0$ jest podzielna odpowiednio przez 4, 25 i 100.

Sposób badania podzielności liczby L przez 6, 12, 14, 15, 18, 20 omówiliśmy w punkcie D. Badając podzielność liczb, można często skorzystać z następującej własności:

IV. Jeśli $p|q$ i $q|L$, to $p|L$.

Własność tę można łatwo uzasadnić. Na jej podstawie mamy oczywiste zależności:

– jeżeli $9|L$, to $3|L$, ponieważ $3|9$;

– jeżeli $8|L$, to $4|L$, ponieważ $4|8$;

– jeżeli $12|L$, to $6|L$, $4|L$, $3|L$ i $2|L$, ponieważ $6|12$, $4|12$, $3|12$ oraz $2|12$.

Literatura

[1] Białas A., *O podzielności liczb*. Biblioteczka Matematyczna 7, PZWS, Warszawa 1960.

[2] Gleichgewicht B., *Algebra*. Oficyna Wydawnicza GiS, Wrocław 2004.

[3] Nowicki A., *Podzielność w zbiorze liczb całkowitych*. Olsztyńska Wyższa Szkoła Informatyki i Zarządzania, Olsztyn 2012.

[4] Sierpiński W., *O rozwiązywaniu równań w liczbach całkowitych*. WN PWN, Warszawa 2009.

FEATURES OF DIVISIBILITY BY DIFFERENT NATURAL NUMBERS

Summary

In this paper a few different methods of proving some divisibility rules are given. These methods are very simple and intuitive. Unfortunately, in secondary school mathematical textbooks there are no such methods as the school curriculum only mentions some of the divisibility rules and „tests“ these rules on selected numbers. We believe that our approach can be very useful. Firstly, presenting our approach, teaching mathematics may be more attractive. Secondly, elements of any proving are very important in school teaching. Thirdly, our proposal can be of use to people not related to mathematics, for example, to verify their expenses.