„Kwartalnik Opolski” 2012, 1

Arkadiusz BRYLL
Robert SOCHACKI

Pewne własności okręgu Apoloniusza

Trochę historii

Celem artykułu jest z jednej strony przypomnienie postaci jednego z największych geometrów starożytnej Grecji, a z drugiej pokazanie związków jednego z pojęć typowych dla geometrii euklidesowej – okręgu, z pojęciami geometrycznymi, które mają fundamentalne znaczenie w geometriach nieeuklidesowych. Postacią, służącą przedstawieniu tych związków, będzie Apoloniusz z Pergi (ok. 260 p.n.e. – ok. 190 p.n.e.), działający głównie w Aleksandrii i Pergamonie. Uznaje się go jako twórcę teorii krzywych stożkowych, czyli krzywych drugiego stopnia. Wprowadził on do obiegu takie pojęcia jak hiperbola, elipsa, parabola i asymptota. W czasach, w których tworzył, nadano mu miano Wielkiego Geometry. O trwałości dorobku Apoloniusza i jego wpływie na rozwój geometrii euklidesowej zadecydowało jego dzieło *Conics* (traktat złożony z 8 ksiąg, z których zachowało się tylko 7) o przecięciach stożkowych. Siedem pierwszych ksiąg tego monumentalnego dzieła zawiera 387 twierdzeń, które prezentują stan wiedzy o krzywych stożkowych niewiele różniący się od stanu dzisiejszego. Oczywiście, wiele dowodów tych twierdzeń ma obecnie postać bardziej precyzyjną niż te prezentowane przez Apoloniusza, ale jest to zasługa przede wszystkim geometrii analitycznej, która powstała 2 tys. lat później (głównie w wyniku badań Kartezjusza[1]) i to pod znacznym wpływem pomysłów Wielkiego Geometry. Można więc uznać Apoloniusza za prekursora

[1] Kartezjusz (René Descartes, 1596–1650), francuski matematyk, filozof i fizyk, wprowadził do geometrii metodę współrzędnych i zapoczątkował badanie obiektów geometrycznych środkami algebraicznymi.

geometrii analitycznej[2]. O trwałości dorobku Apoloniusza i jego wielkim wpływie na kształt nowożytnej matematyki może także świadczyć fakt, że dzieło *Conics* znalazło uznanie u takich wielkich matematyków jak François Viète, Edmond Halley, Pierre de Fermat, David Hilbert. Niektóre z ksiąg *Conics* doczekały się nowych tłumaczeń (Viète – *O styczności*, Halley – *O przekrojach w przestrzeni*), niektóre doczekały się wznowień (Fermat). Dzięki tym nowym opracowaniom w literaturze naukowej utrwaliły się takie pojęcia jak problem Apoloniusza (problem matematyczny polegający na skonstruowaniu okręgu stycznego do trzech innych okręgów), okrąg Apoloniusza (definicja podana w dalszej części pracy). Apoloniusz badał nie tylko krzywe stożkowe, lecz także kwadryki, czyli powierzchnie drugiego stopnia.

Warto tutaj podkreślić za Hilbertem, iż prace Apoloniusza były też epokowe pod innym względem. Starał się on wyzwolić matematykę spod wszechobecnej w tamtych czasach filozofii platońskiej. Świadczyć o tym może fakt, iż w jednym ze swych opracowań Apoloniusz stara się znaleźć powiązanie pojęć matematycznych z otaczającą rzeczywistością. Apoloniusz był również astronomem. Stosował różne modele geometryczne do badania ruchu planet, a także ruchu księżyca. Wyniki Apoloniusza wykorzystał astronom i matematyk niemiecki Johannes Kepler (1571–1630), stosując krzywe stożkowe w astronomii matematycznej przy ustalaniu praw ruchu planet (trzy prawa Keplera). Wraz ze śmiercią Apoloniusza skończył się złoty okres matematyki greckiej (Hipokrates z Chios, Eudoksos z Knidos, Euklides, Archimedes, Tales z Miletu, Erastotenes, Diokles, Nikomedes). Nie zamyka to oczywiście wybitnych osiągnięć Greków w późniejszym okresie (Heron z Aleksandrii, Menelaos z Aleksandrii, Ptolemeusz Klaudiusz, Diofantos, Pappus, Proklos).

Dalsza część pracy będzie miała charakter bardziej formalny. Pokażemy w niej związek między okręgiem Apoloniusza a pojęciem dwustosunku czterech punktów. Pojęcie dwustosunku jest pojęciem bardzo ważnym w geometrii nieeuklidesowej. Przypomnijmy tutaj, że oprócz geometrii Euklidesa nauczanej w szkołach istnieją tzw. geometrie nieeuklidesowe. W jednej z nich może nie być prostych równoległych i suma miar kątów wewnętrznych w dowolnym trójkącie jest większa niż kąt półpełny (geometria eliptyczna), natomiast w innej – przez punkt poza prostą można poprowadzić dwie (a nawet nieskończenie wiele) prostych nieprzecinających danej prostej oraz suma miar kątów wewnętrznych dowolnego trójkąta jest mniejsza od kąta półpełnego (geometria hiperboliczna). Interesujący może wydawać się fakt, że każdą z tych

[2] Prekursorem rachunku różniczkowego i całkowego był grecki matematyk Eudoksos z Knidos (ok. 408 p.n.e. – ok. 355 p.n.e.).

geometrii nieeuklidesowych można badać w modelu, który operuje pojęciami z geometrii euklidesowej.

Powróćmy jednak do pojęcia dwustosunku (dokładniejsza definicja w dalszej części pracy). Okazuje się, że służy ono np. do zdefiniowania odległości dwóch punktów w modelu Kleina geometrii hiperbolicznej. Jest to także podstawowe pojęcie w geometrii rzutowej (w której nie występują proste równoległe). Za pomocą tego pojęcia można zdefiniować bardzo ważne pojęcie relacji rozdzielania na prostej rzutowej (analogon relacji „leżenia między" na prostej euklidesowej) oraz dwustosunku pęku prostych. Widzimy zatem, że pojęcie dwustosunku ma bardzo szerokie spektrum zastosowania głównie w geometriach nieeuklidesowych. Warto więc poznać jego związki z jedną z podstawowych figur geometrycznych z geometrii euklidesowej – okręgiem Apoloniusza.

Okrąg Apoloniusza we współrzędnych

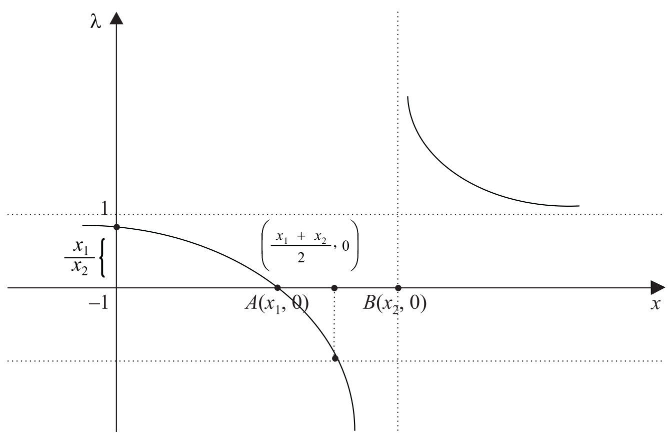
Niech punkty A, B, M ($M \neq B$) leżą na jednej osi na płaszczyźnie euklidesowej. S t o s u n k i e m p o d z i a ł u w e k t o r a $\overrightarrow{AB}$ przez punkt M (oznaczonym przez $p(A, B, M)$) nazywamy iloraz miar wektorów $\overrightarrow{AM}$ i $\overrightarrow{BM}$ względem tej osi:

$$p(A,B,M) = \lambda \Leftrightarrow \lambda = \frac{(AM)}{(BM)} \tag{1}$$

Jeżeli punkty A, B są ustalone i mają odpowiednie współrzędne $(x_1, 0)$, $(x_2, 0)$, $(x_1 < x_2)$, zaś punkt $M(x, 0)$ zmienia się, to funkcja:

$$\lambda = f(x) = \frac{(AM)}{(BM)} = \frac{x - x_1}{x - x_2}$$

ma przebieg podany na rys. 1.



Rys. 1.

Na podstawie rys. 1 możemy zauważyć, że zachodzą następujące zależności:

– jeżeli $x \in (x_1, x_2)$, to $\lambda < 0$ (dla $x = \frac{x_1 + x_2}{2}$, otrzymujemy $\lambda = -1$),

– jeżeli $x < x_1$, to $0 < \lambda < 1$,

– jeżeli $x > x_2$, to $\lambda > 1$.

Załóżmy, że we wzorze $\lambda = \frac{(AM)}{(BM)}$ punkt M jest dowolny (a więc nie zakłada się, że jest on współliniowy z punktami A i B) oraz spełniony jest warunek:

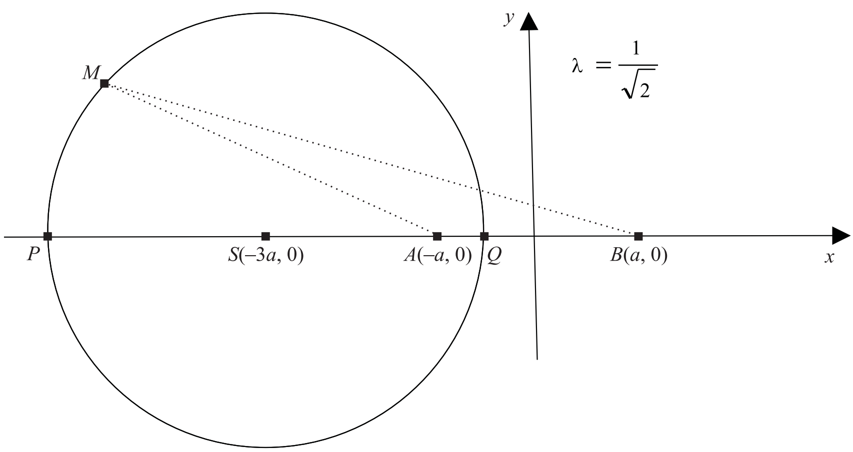
$$\lambda = \frac{|AM|}{|BM|} = const \neq 1 \tag{2}$$

Wówczas równanie (2) określa nam okrąg Apoloniusza. Jeżeli $A(-a, 0)$, $B(a, 0)$, gdzie $(a > 0)$ oraz $M(x, y)$, to otrzymujemy zależności postaci: $|AM|^2 = (x + a)^2 + y^2$, $|BM|^2 = (x - a)^2 + y^2$ i wobec (2) mamy: $(x + a)^2 + y^2 = \lambda^2 [(x - a)^2 + y^2]$. Równanie to można przedstawić w postaci:

$$\left(x + \frac{1+\lambda^2}{1-\lambda^2} a\right)^2 + y^2 = \left(\frac{2a\lambda}{1-\lambda^2}\right)^2 \tag{3}$$

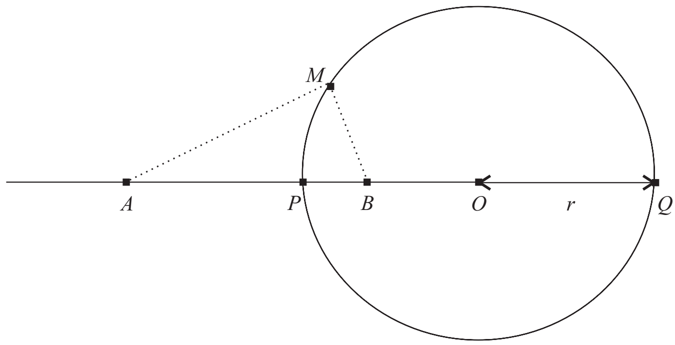
Jest to okrąg Apoloniusza o środku $S\left(-\frac{1+\lambda^2}{1-\lambda^2} a, 0\right)$ i o promieniu $r = \left|\frac{2a\lambda}{1-\lambda^2}\right|$.

Okrąg ten przecina oś Ox w punktach $P\left(\frac{\lambda+1}{\lambda-1} a, 0\right)$ i $Q\left(\frac{\lambda-1}{\lambda+1} a, 0\right)$ (rys. 2).



Rys. 2.

Wykażemy, że punkt B jest obrazem inwersyjnym punktu A względem okręgu Apoloniusza określonego warunkiem (2). Niech środek okręgu inwersyjnego znajduje się w punkcie O i niech promień wynosi r (rys. 3).



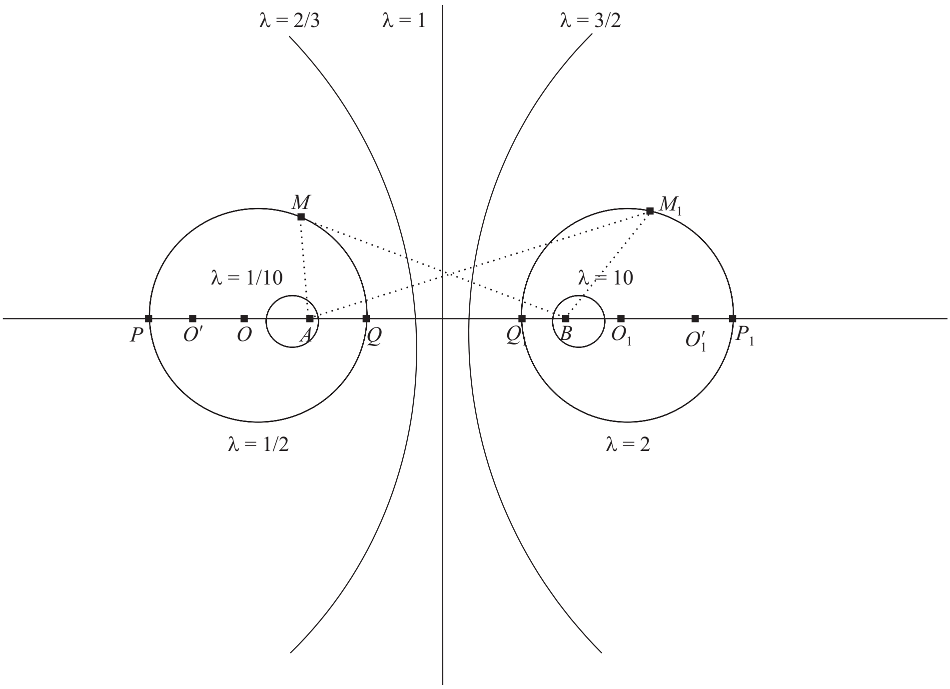
Rys. 3.

Mamy wtedy: $\dfrac{|AM|}{|BM|} = \lambda = \dfrac{|AP|}{|BP|} = \dfrac{|AQ|}{|BQ|}$, czyli $\dfrac{|AO| - r}{r - |BO|} = \dfrac{|AO| + r}{|BO| + r}$.

Na podstawie ostatniej równości otrzymujemy $|AO| \cdot |BO| = r^2$. Punkt B jest więc obrazem punktu A w inwersji względem okręgu o środku O i promieniu r.

Jeżeli w równaniu $\dfrac{|AM|}{|BM|} = \lambda$ punkty A i B są ustalone, zaś parametr λ zmienia się, to równość ta przedstawia rodzinę nieprzecinających się okręgów Apoloniusza, o punktach granicznych A i B (rys. 4). Dla $\lambda = 1$, warunek $\dfrac{|AM|}{|BM|} = 1$ określa prostą, będącą symetralną odcinka AB (prosta potęgowa wyznaczona przez dwa okręgi Apoloniusza o parametrach λ i $\dfrac{1}{\lambda}$, $\lambda \neq 1$).

Z okręgiem Apoloniusza mamy do czynienia w przypadku pościgu dwóch statków poruszających się ze stałymi prędkościami V_A (prędkość statku uciekającego) oraz V_B (prędkość statku ścigającego). Jeżeli założymy, że punkty A i B są pozycjami wyjściowymi statków i $\dfrac{V_A}{V_B} = \lambda < 1$, to spotkanie statków może nastąpić w każdym punkcie okręgu Apoloniusza (rys. 2). Statek uciekający może zagwarantować sobie najdłuższy czas ucieczki, kierując się na punkt P, i tam nastąpi spotkanie statków. Okrąg Apoloniusza wykorzystywany jest również w badaniu pościgu statków znajdujących się w pobliżu brzegu danego akwenu.



Rys. 4.

Dwustosunkiem czwórki uporządkowanej różnych punktów współliniowych A, B, P, Q (leżących np. na osi Ox), oznaczonym przez $q(A, B, P, Q)$, nazywamy iloraz stosunku podziału wektora $\overrightarrow{AB}$ przez punkt P i stosunku podziału tego wektora przez punkt Q, tj.

$$q(A,B,P,Q) = \frac{(AP)}{(BP)} : \frac{(AQ)}{(BQ)} \tag{4}$$

Jeżeli $\frac{(AP)}{(BP)} = -\frac{(AQ)}{(BQ)}$, to $q(A, B, P, Q) = -1$. Wtedy jeden z punktów P, Q leży między punktami A, B, a drugi na zewnątrz nich. W przypadku gdy $q = -1$, czwórkę uporządkowaną punktów A, B, P, Q nazywamy czwórką harmoniczną, a o punktach tych mówimy, że są harmonicznie sprzężone. Interesujące uogólnienie dwóch pojęć: pojęcia stosunku podziału wektora i pojęcia dwustosunku czwórki punktów znaleźć można w pracach [2, 3]. Autorka podaje tam definicje tych pojęć dla przestrzeni więcej niż dwuwymiarowych.

Przypomnijmy w tym miejscu, że pojęcie dwustosunku jest dość mocno wykorzystywane w geometriach nieeuklidesowych. Na przykład w modelu Kleina geometrii hiperbolicznej, złożonego z dowolnego koła (bez brzegu tego koła), odległość między dwoma punktami A, B wewnątrz tego koła definiuje się jako wartość wyrażenia $|lnq(A, B, P, Q)|$, gdzie P, Q to punkty wspólne prostej (AB) z brzegiem koła, a symbol ln oznacza logarytm naturalny. Na przykład na rys. 3, odległość punktu B od punktu O (w modelu Kleina oczywiście) wynosiłaby $|lnq(O, B, P, Q)|$.

Wcześniej stwierdziliśmy, że okrąg Apoloniusza (3) przecina oś Ox w punktach $P\left(\frac{\lambda+1}{\lambda-1}a, 0\right)$ i $Q\left(\frac{\lambda-1}{\lambda+1}a, 0\right)$. Wtedy:

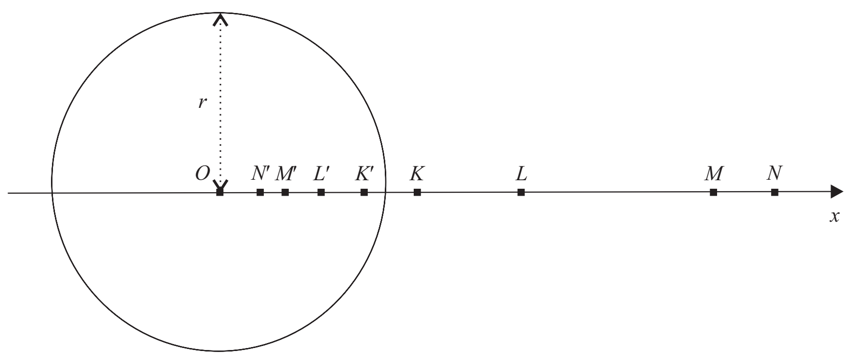
$$\frac{(AP)}{(BP)}:\frac{(AQ)}{(BQ)}=\frac{\frac{\lambda+1}{\lambda-1}a+a}{\frac{\lambda+1}{\lambda-1}a-a}:\frac{\frac{\lambda-1}{\lambda+1}a+a}{\frac{\lambda-1}{\lambda+1}a-a}=\frac{2\lambda}{2}:\frac{2\lambda}{-2}=-1.$$

Punkty A, B, P, Q tworzą więc czwórkę harmoniczną.

Wykażemy, że każde przekształcenie przez inwersję zachowuje dwustosunek czwórki punktów (zob. [1]). W tym celu weźmy pod uwagę dwustosunek punktów K, L, M, N, tj.

$$q(K,L,M,N)=\frac{(KM)}{(LM)}:\frac{(KN)}{(LN)}.$$

Niech okrąg o środku O i promieniu r będzie okręgiem inwersyjnym i niech punkty K', L', M', N' będą obrazami inwersyjnymi odpowiednio punktów K, L, M, N (rys. 5).



Rys. 5.

Z definicji przekształcenia inwersyjnego mamy wtedy:

$$|OK| \cdot |OK'| = |OL| \cdot |OL'| = |OM| \cdot |OM'| = |ON| \cdot |ON'| = r^2.$$

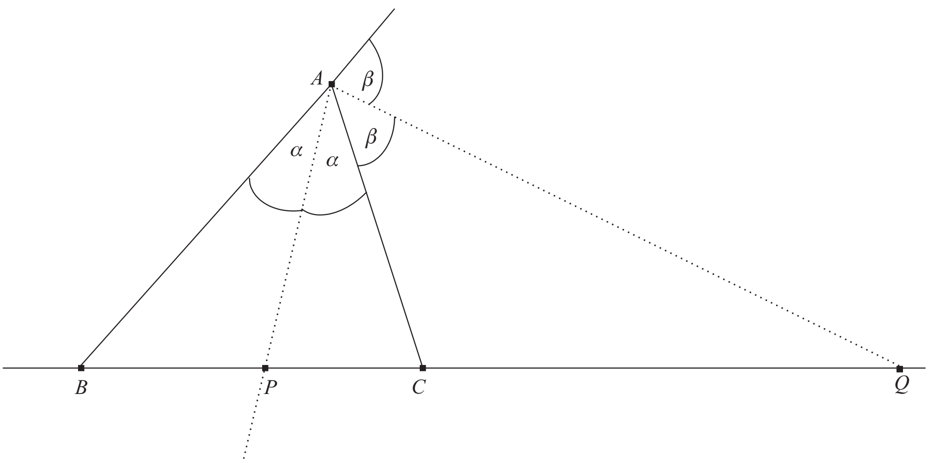
Obliczając dwustosunek $q(K, L, M, N)$, otrzymamy:

$$\frac{|KM|}{|LM|}:\frac{|KN|}{LN}=\frac{|OM|-|OK|}{|OM|-|OL|}:\frac{|ON|-|OK|}{|ON|-|OL|}=\frac{\frac{r^2}{|OM'|}-\frac{r^2}{|OK'|}}{\frac{r^2}{|OM'|}-\frac{r^2}{|OL'|}}:\frac{\frac{r^2}{|ON'|}-\frac{r^2}{|OK'|}}{\frac{r^2}{|ON'|}-\frac{r}{|OL'|}}=$$

$$=\frac{|OK'|-|OM'|}{|OL'|-|OM'|}:\frac{|OK'|-|ON'|}{|OL'|-|ON'|}=\frac{|M'K'|}{|M'L'|}:\frac{|N'K'|}{|N'L'|}=$$

$$=\frac{|K'M'|}{|L'M'|}:\frac{|K'N'|}{|L'N'|}=q(K',L',M',N').$$

Wykazaliśmy więc, że $q\ (K, L, M, N) = q\ (K', L', M', N')$. Jeżeli więc okrąg Apoloniusza o promieniu r i o środku w punkcie O potraktujemy jako okrąg inwersyjny, to w tej inwersji zachowany będzie dwustosunek czwórki punktów. W szczególności jeśli są to punkty A, B, P, Q (rys. 2), tworzące czwórkę harmoniczną, to ich obrazy inwersyjne A', B', P', Q' tworzą również czwórkę harmoniczną.



Rys. 6.

Zauważmy, że czwórkę harmoniczną punktów tworzą wierzchołki B i C trójkąta ABC z punktami P, Q przecięcia się dwusiecznych kąta wewnętrznego i zewnętrznego przy wierzchołku A z prostą BC (rys. 6) (zob. [4]).

Jeżeli więc obierzemy dowolny punkt M na okręgu Apoloniusza (rys. 3) i w trójkącie ABM poprowadzimy dwusieczne kąta wewnętrznego i kąta zewnętrznego przy wierzchołku M do przecięcia z prostą AB w punktach P, Q, to punkty te leżeć będą na okręgu Apoloniusza $\frac{|\vec{AM}|}{|\vec{BM}|}=\lambda$ i czwórka punktów A, B, P, Q będzie czwórką harmoniczną.

Z powyższych rozważań wynika więc, że pojęcia, za pomocą których definiuje się i bada własności obiektów z geometrii nieeuklidesowych, w sposób nierozerwalny związane są z podstawowymi pojęciami z geometrii Euklidesa. Bardzo ważnym pojęciem jest tutaj okrąg i przekształcenie inwersyjne względem okręgu. Za pomocą takich przekształceń definiuje się przystawanie figur w geometriach nieeuklidesowych. Aby obliczyć odległość punktów nieeuklidesowych, należy posłużyć się dwustosunkiem czwórki punktów euklidesowych. Okazuje się, że odległości dwóch dowolnych punktów oraz ich obrazów inwersyjnych są identyczne, a zatem rolę izometrii nieeuklidesowej pełni tutaj inwersja względem okręgu. Ponadto sam okrąg Apoloniusza może posłużyć jako model matematyczny do rozwiązywania problemów praktycznych związanych np. z pościgiem (przy pewnych dodatkowych założeniach). Okrąg jawi się zatem jako obiekt geometryczny, bez którego wiele problemów trudno byłoby rozwiązać.

SOME PROPERTIES OF APOLONIUS'S CIRCLE

Summary

In the paper, the authors discuss some problems related to the circle of Apollonius and some notions of non-Euclidean geometry. For example, such notions are: double ratio of four points, double ratio of four lines, inversion transformation. Apollonius was a Greek mathematician known as 'The Great Geometer'. He contributed to the development of mathematics in innumerable ways. His famous book *Conics* was written in eight volumes. Unfortunately, only the first seven have survived until today. Its title, *Conics*, means *of* or *relating to* a cone. In the book, Apollonius introduced the terms *parabola*, *ellipse* and *hyperbola*. Also, *conic* sections are the curves formed when a plane intersects the surface of a cone. Apollonius showed how to construct the circle, tangent to three given circles. He also extended Euclid's theory of irrationals and improved Archimedes' approximation of π.

Literatura

[1] H.S.M. Coxeter, *Wstęp do geometrii dawnej i nowej*, przeł. R. Krasnodębski, PWN, Warszawa 1967.
[2] J. Knop, *Geometria*, wyd. 2. Wyd. Akademii im. Jana Długosza w Częstochowie, Częstochowa 2007.
[3] J. Knop, *About a certain generalization of the affine ratio of three points and unharmonic ratio of four points*, „Bulletin of the Section of Logic" 32 (1/2) (2003), 33–42.
[4] *Matematyka – Encyklopedia dla wszystkich*, red. K. Cegiełka, WNT, Warszawa 2000.
[5] W. Pogorzelski, *Geometria analityczna*, wyd. 5, PWN, Warszawa 1959.